

ویراست ششم

# حساب دیفرانسیل و انتگرال

جیمز استوارت

ترجمه ارشد حمیدی

---

قسمت اول جلد ۲

---



# فهرست

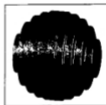
پیشگفتار هشت

سخنی با دانشجویان چهارده

## ۴۳۴ کاربردهای انتگرال گیری

۱.۶	مساحت بین منحنیها	۲۳۵
۲.۶	حجم	۲۲۳
۳.۶	حجم پوسته‌های استوانه‌ای	۲۵۶
۴.۶	کار	۲۶۲
۵.۶	مقدار متوسط تابع	۲۶۹
	مرکز	۲۷۳

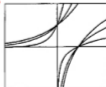
۶



## ۴۸۰ تابعهای وارون

۱.۷	تابعهای وارون	۴۸۱
۲.۷	تابعهای نمایی و مشتق آنها	۴۹۰
۳.۷	تابعهای لگاریتمی	۵۰۵
۴.۷	مشتق تابعهای لگاریتمی	۵۱۳
۵.۷	تابع لگاریتم طبیعی	۵۲۵

۷

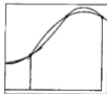


۳.۷	تابع نمایی طبیعی	۵۳۶
۴.۷	تابهای لگاریتمی و نمایی کلی	۵۳۵
۵.۷	رشد و زوال نمایی	۵۵۶
۶.۷	تابهای وارون مثلثاتی	۵۶۵
	پروژه کاربردی ■	۵۷۵
۷.۷	تابهای هذلولوی	۵۷۶
۸.۷	صورت‌های سهم و قاعده هویثال	۵۸۴
	پروژه نوشتی ■	۵۹۷
	مرور	۵۹۸

## ۶۰۶ تکنیکهای انتگرال‌گیری

A

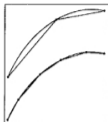
۱.۸	انتگرال‌گیری به روش جزء جزء	۶۰۷
۲.۸	انتگرالهای مثلثاتی	۶۱۵
۳.۸	تبدیلیتهای مثلثاتی	۶۲۲
۴.۸	انتگرال‌گیری از تابع‌های گویا به روش کسرهای جزئی	۶۲۲
۵.۸	استازوی انتگرال‌گیری	۶۲۳
۶.۸	انتگرال‌گیری با استفاده از جدولها و سیستم‌های جبری کامپیوتری	۶۵۰
	پروژه اکتشافی ■	۶۵۷
۷.۸	انتگرال‌گیری تقریبی	۶۵۸
۸.۸	انتگرالهای ناسره	۶۷۳
	مرور	۶۸۵



## کاربردهای دیگری از انتگرال گیری ۶۹۴

۹

طول قوس ۶۹۵	۱.۹
پروژه اکتشافی ■ ۷۰۳	
مساحت رویه دورانی ۷۰۴	۲.۹
پروژه اکتشافی ■ ۷۱۱	
کاربردهایی در فیزیک و مهندسی ۷۱۲	۳.۹
پروژه اکتشافی ■ ۷۲۲	
کاربردهایی در اقتصاد و زیست‌شناسی ۷۲۵	۴.۹
احتمال ۷۳۰	۵.۹
مرور ۷۳۰	



## معادلات دیفرانسیل ۷۴۶

۱۰

مدل‌سازی با معادلات دیفرانسیل ۷۴۷	۱.۱۰
میدان سوا و روش لاپلاس ۷۵۳	۲.۱۰
معادلات تنگ‌بند ۷۶۳	۳.۱۰
پروژه کاربردی ■ ۷۷۲	
پروژه تحقیقاتی ■ ۷۷۶	
مدلهایی برای افزایش جمعیت ۷۷۷	۴.۱۰
پروژه کاربردی ■ ۷۹۰	
معادلات خطی ۷۹۲	۵.۱۰
دستگاههای شکارچی-شکار ۷۹۹	۶.۱۰
مرور ۸۰۷	



## معادله‌های پارامتری و مختصات قطبی ۸۱۴

۱۱

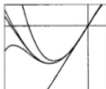
۱.۱۱	منحنه‌هایی که با معادله‌های پارامتری تعریف شده‌اند	۸۱۵
	پروژه آزمایشگاهی ■	۸۲۵
۲.۱۱	حساب دیفرانسیل و انتگرال منحنه‌های پارامتری	۸۲۶
	پروژه آزمایشگاهی ■	۸۳۸
۳.۱۱	مختصات قطبی	۸۳۹
۴.۱۱	مساحت و طول در مختصات قطبی	۸۵۲
۵.۱۱	مقاطع مخروطی	۸۵۹
۶.۱۱	مقاطع مخروطی در مختصات قطبی	۸۶۹
	مرور	۸۷۷



## دنباله‌های نامتناهی و سریها ۸۸۲

۱۲

۱.۱۲	دنباله‌ها	۸۸۳
	پروژه آزمایشگاهی ■	۸۹۸
۲.۱۲	سریها	۸۹۹
۳.۱۲	آزمون انتگرال و تخمین مجموعها	۹۱۱
۴.۱۲	آزمونهای مقایسه	۹۲۱
۵.۱۲	سریهای متناوب	۹۲۷
۶.۱۲	هنگامی مطلق و آزمونهای نسبت و ریشه	۹۳۳
۷.۱۲	سخت‌ترین برای آزمون سریها	۹۴۱
۸.۱۲	سریهای توانی	۹۴۴
۹.۱۲	نمایش تابعها به شکل سریهای توانی	۹۵۱
۱۰.۱۲	سریهای تیلور و مک‌لورین	۹۵۹
	پروژه آزمایشگاهی ■	۹۷۶
	پروژه نوشتنی ■	۹۷۷



۱۱.۱۲ کاربردهای چندجمله‌ای نیور ۹۷۸

۹۸۹ ■ پروژۀ آزمایشگاهی

مرد ۹۹۰

پیوست



پاسخ ترمینالهای با شماره فرد پ ۴۲

mikhanam.com



## پیشگفتار

کشف بزرگ است که منجر به حل مسأله‌ای مهم می‌شود، اما در راه حل هر مسأله‌ای مایه‌ای از اکتشاف وجود دارد. ممکن است مسأله‌تان معمولی باشد؛ اما اگر کنجکاری شما را تحریک کند و قوه خلاقه شما را به کار اندازد، و اگر خودتان آن را حل کنید، چه بسا که منحل دشواری شوید و طعم موفقیت را بچشید.

جورج پولیا

مارک ون دورن گفته است که هنر تدریس هنر همیاری در کشف کردن است. کوشیده‌ام کتابی بنویسم که به دانشجویان در کشف کردن حساب دیفرانسیل و انتگرال - هم بی‌بردن به قدرتش در مسأله‌های عملی و هم دریافتن زیبایی شگفتناپذیرش - کمک کند. در این ویاست، مانند پنج ویاست اول، هدفم این بوده که به دانشجویان دلیل سودمندی حساب دیفرانسیل و انتگرال را بفهمانم و تواناییهای تکلیکی‌شان را بالا ببرم. هوشمین تلاش کرده‌ام برخی زیباییهای ذاتی این بحث را نشان دهم. نوشتن بی‌شک هنگام تامل آموز به کشفیات بزرگش طعم موفقیت را چشیده است. می‌خواهم دانشجویان در شور و هیجان او سهیم باشند.

تأکید بر فهمیدن مفاهیم است. فکر می‌کنم که تقریباً همه موافق‌اند که این امر باید هدف اصلی آموزش حساب دیفرانسیل و انتگرال باشد. در حقیقت، امواج نمایانته فعلی به اصلاح آموزش حساب دیفرانسیل و انتگرال از کنفرانس تولن در سال ۱۹۸۶ برخاست، که در آنجا نخستین توصیه‌شان را

تمرکز بر درک مفهومی

تأکید دادند. سعی کرده‌ام که این هدف را در قالب اصل سه چیز تحقق بخشیم: «مباحث را باید هندسی، عددی و جبری مطرح کرد». تجسم، تجربه اندوختن از بررسیهای عددی و نموداری و دیگر شیوه‌ها چگونگی تدریس استدلال مفهومی را به‌طور اساسی دستخوش تغییر می‌کند. اخیراً اصل سه چیز را با اهمیت دادن به جنبه‌های کلامی، با توصیفی، گسترش داده‌اند و به اصل چهار چیز تبدیل کرده‌اند.

در نوشتن ویاست ششم این کتاب فرض را بر این گذاشتم که می‌شود به درک مفهومی رسید و در عین حال بهترین سنتهای حساب دیفرانسیل و انتگرال سنتی را حفظ کرد. این کتاب حاوی عناصر اصلی اصلاحات است، اما در قالب برنامه درسی سنتی.



تربیه‌های مفهومی

مهمترین راه رسیدن به درک مفهومی حل کردن مسأله‌هایی است که تعیین کرده‌ایم. برای رسیدن به این هدف انواع مختلفی از مسأله‌ها را تدارک دیدیم. برخی مجموعه تمرینها با خواستن توضیح معنی مفاهیم اصلی بخش مورد نظر شروع می‌شوند. (مثلاً چند تمرین اول بخشهای ۲.۲، ۵.۲، ۲.۱۲، ۴.۱۵ و ۳.۱۵ را ببینید.) به‌طور مشابه همه فستهای مربوط به مرور با پرسشهای مفهومی و درست‌نادرست شروع می‌شوند. تمرینهای دیگری درک مفهومی را از طریق بررسیهای نموداری یا جدولی حل مسأله (تمرینهای ۱.۳، ۱۷.۱، ۳.۲، ۳.۱، ۳.۳، ۳.۴، ۳.۵، ۳.۶، ۳.۷، ۳.۸، ۳.۹، ۳.۱۰، ۳.۱۱، ۳.۱۲، ۳.۱۳، ۳.۱۴، ۳.۱۵، ۳.۱۶، ۳.۱۷، ۳.۱۸، ۳.۱۹، ۳.۲۰، ۳.۲۱، ۳.۲۲، ۳.۲۳، ۳.۲۴، ۳.۲۵، ۳.۲۶، ۳.۲۷، ۳.۲۸، ۳.۲۹، ۳.۳۰، ۳.۳۱، ۳.۳۲، ۳.۳۳، ۳.۳۴، ۳.۳۵، ۳.۳۶، ۳.۳۷، ۳.۳۸، ۳.۳۹، ۳.۴۰، ۳.۴۱، ۳.۴۲، ۳.۴۳، ۳.۴۴، ۳.۴۵، ۳.۴۶، ۳.۴۷، ۳.۴۸، ۳.۴۹، ۳.۵۰، ۳.۵۱، ۳.۵۲، ۳.۵۳، ۳.۵۴، ۳.۵۵، ۳.۵۶، ۳.۵۷، ۳.۵۸، ۳.۵۹، ۳.۶۰، ۳.۶۱، ۳.۶۲، ۳.۶۳، ۳.۶۴، ۳.۶۵، ۳.۶۶، ۳.۶۷، ۳.۶۸، ۳.۶۹، ۳.۷۰، ۳.۷۱، ۳.۷۲، ۳.۷۳، ۳.۷۴، ۳.۷۵، ۳.۷۶، ۳.۷۷، ۳.۷۸، ۳.۷۹، ۳.۸۰، ۳.۸۱، ۳.۸۲، ۳.۸۳، ۳.۸۴، ۳.۸۵، ۳.۸۶، ۳.۸۷، ۳.۸۸، ۳.۸۹، ۳.۹۰، ۳.۹۱، ۳.۹۲، ۳.۹۳، ۳.۹۴، ۳.۹۵، ۳.۹۶، ۳.۹۷، ۳.۹۸، ۳.۹۹، ۳.۱۰۰ را ببینید).

در برخی دیگر از تمرینها از توصیف کلاسی برای تشخیص کمک مفهومی استفاده شده است (تمرینهای ۱.۳، ۱.۴، ۱.۵، ۱.۶، ۱.۷، ۱.۸، ۱.۹، ۱.۱۰، ۱.۱۱، ۱.۱۲، ۱.۱۳، ۱.۱۴، ۱.۱۵، ۱.۱۶، ۱.۱۷، ۱.۱۸، ۱.۱۹، ۱.۲۰، ۱.۲۱، ۱.۲۲، ۱.۲۳، ۱.۲۴، ۱.۲۵، ۱.۲۶، ۱.۲۷، ۱.۲۸، ۱.۲۹، ۱.۳۰، ۱.۳۱، ۱.۳۲، ۱.۳۳، ۱.۳۴، ۱.۳۵، ۱.۳۶، ۱.۳۷، ۱.۳۸، ۱.۳۹، ۱.۴۰، ۱.۴۱، ۱.۴۲، ۱.۴۳، ۱.۴۴، ۱.۴۵، ۱.۴۶، ۱.۴۷، ۱.۴۸، ۱.۴۹، ۱.۵۰، ۱.۵۱، ۱.۵۲، ۱.۵۳، ۱.۵۴، ۱.۵۵، ۱.۵۶، ۱.۵۷، ۱.۵۸، ۱.۵۹، ۱.۶۰، ۱.۶۱، ۱.۶۲، ۱.۶۳، ۱.۶۴، ۱.۶۵، ۱.۶۶، ۱.۶۷، ۱.۶۸، ۱.۶۹، ۱.۷۰، ۱.۷۱، ۱.۷۲، ۱.۷۳، ۱.۷۴، ۱.۷۵، ۱.۷۶، ۱.۷۷، ۱.۷۸، ۱.۷۹، ۱.۸۰، ۱.۸۱، ۱.۸۲، ۱.۸۳، ۱.۸۴، ۱.۸۵، ۱.۸۶، ۱.۸۷، ۱.۸۸، ۱.۸۹، ۱.۹۰، ۱.۹۱، ۱.۹۲، ۱.۹۳، ۱.۹۴، ۱.۹۵، ۱.۹۶، ۱.۹۷، ۱.۹۸، ۱.۹۹، ۲.۰۰ را ببینید).

مجموعه تمرینهای طبقه‌بندی‌شده

هر مجموعه تمرین به‌دقت طبقه‌بندی شده است. به‌تدریج از تمرینهای مفهومی ابتدایی و مسأله‌های مهارت‌یابی به مسأله‌های دشوارتر که شامل کارهای چالاکانه‌تر هستند پیش می‌رود.

داده‌های مربوط به دنیای واقعی

دست‌آورد و من مدت زمان زیادی را برای سرزدن به کتابخانه‌ها، مراجعه به کارخانه‌ها و نهادهای دولتی و جستجو در اینترنت برای یافتن داده‌های جالب مربوط به دنیای واقعی برای معرفی، دلیل بررسی و روشن کردن مفاهیم حساب‌تفاضلی و انتگرالی صرف کرده‌ایم. در نتیجه، خیلی از مثالها و تمرینها مربوط به تابهایی‌اند که با چنین داده‌های عددی یا نمودارها تعریف شده‌اند. مثلاً شکل ۱ در بخش ۱.۱ (نموداری که ارزش‌نگار از زنگار کورنرچ تولید کرده است)، تمرین ۳.۴.۲.۳ (درصد جمعیت زیر ۱۸ سال)، تمرین ۳.۴.۲.۴ (سرعت فضایی ایندور) و شکل ۴ بخش ۴.۵ (مصرف برق سائفرانسیسکو) را ببینید. تابهایی بود متغیره با جدولی از مقدارهای شاخص باد-سرما به‌عنوان تابعی از دمای هوا و سرعت باد توضیح داده‌ایم (مثال ۲ در بخش ۱.۱۵). مشتقهای جزئی را در بخش ۳.۱۵ با بررسی ستونی در جدول مقدارهای شاخص گرما (دمای هوایی که احساس می‌کنیم) به‌عنوان تابعی از دمای واقعی و رطوبت نسبی معرفی می‌کنیم. این مثال را به‌دلیل ارتباطش با تقریب خطی بیشتر بررسی می‌کنیم (مثال ۳ در بخش ۲.۱۵). مشتقهای سویی را در بخش ۶.۱۵ با استفاده از نقشه خطهای تراز دما برای تخمین زدن آهنگ تغییر دما در پندو در جهت لاس‌وگاس معرفی شده‌اند. از انتگرالهای دوگانه برای تخمین زدن میزان برف بارش شده در کارپاس در ۲۰ تا ۲۱ دسامبر ۲۰۰۶ استفاده شده است (مثال ۴ در بخش ۱.۱۶). میدانهای برداری را در بخش ۱.۱۶ با ترسیم میدانهای برداری واقعی سرعت که الگوهای ورزش باد خلیج سائفرانسیسکو را نشان می‌دهند معرفی کرده‌ایم.

پروژه‌ها

یکی از راههای دیگری درگیر کردن دانشجویان و ساختن شاگردانی فعال از آنها محول کردن کار (حتی گروهی) روی پروژه‌های ادامه‌داری است که پس از اتمام آن احساس موفقیتی واقعی کنند. در این کتاب سه

نوع پروژه گنجاندهام: پروژه‌های کاربردی مربوط به کاربردهایی‌اند که طوری طراحی شده‌اند که به مذاق دانشجویان خوش بیایند. در پروژه پس از بخش ۳.۱۰ پرسیده‌امیم که رسیدن تویی که به بالا پرتاب شده است به ما کسبم ارتفاعش بیشتر طول می‌کشد یا برگشتش به ارتفاع اولیه‌اش. (اصطلاحاً پاسخ این سؤال شما را شگفت‌زده می‌کند.) در پروژه پس از بخش ۸.۱۵ خواسته‌ام با استفاده از روش ضریبهای لاگرانژ جریمهای سه مرحله پرتاب موشک را طوری تعیین کنید که هر مکمل منیم باشد و در عین حال موشک به سرعت خواسته شده برسد. پروژه‌های آزمایشگاهی مربوط به تکینوئیدی: پروژه بعد از بخش ۲.۱۱ نشان می‌دهد که چگونه از منحنیهای یژه برای طراحی شکلهایی که حروف را در چاپگرهای لیزری نشان می‌دهند استفاده می‌کنند. در پروژه‌های وکتوری از دانشجویان خواسته‌ام روشهای امروزی را با روشهای بنیادگرایان حساب دیفرانسیل و انتگرال و شکل روش فرما برای یافتن خط مماس - مقایسه کنند منابع پیشنهادی را هم آورده‌ام. پروژه‌های آکنشانی نتیجه‌هایی را که بعداً بررسی می‌شوند پیشاپیش مطرح می‌کنند یا کشف کردن. در طرق تشخیص الگوها با تزییب می‌کنند (پروژه پس از بخش ۶.۸ یا ببینید). برخی دیگر مربوط به بررسی مباحث از هندسه است: چهاروجهی (پس از بخش ۴.۱۳)، ابرکره (پس از بخش ۳.۱۶) و تقاطع سه استوانه (پس از بخش ۷.۱۶).

دانشجویان معمولاً با مسأله‌هایی که روالی مشخص برای دست‌آوردن پاسخشان وجود ندارد مشکل دارند. فکر نمی‌کنم هیچ‌کس بر اساس تزییب چهار مرحله‌ای مسأله حل کردن جورج پولیا چیز خیلی زیادی افزوده باشد، از این رو، رویتی از اصول مسأله حل کردن او را پس از فصل ۱ آورده‌ام. از اینجا، هم به‌صراحت هم به‌طور ضمنی، در سراسر کتاب استفاده شده است. پس از دیگر فصلها بخش تحت عنوان چند مسأله دیگر قرار داده‌ام، که حاوی مثالهایی برای چگونه پرداختن به مسأله‌های یکجارو حساب دیفرانسیل و انتگرال است. هنگام انتخاب کردن مسأله‌های متنوع برای این بخش این توصیه دلویت هیلبرت را به‌یاد داشته‌ام: «مسأله ریاضی باید دشوار باشد تا کششی در ما ایجاد کند، در عین حال نباید آنقدر دست‌نیافتنی باشد که تلاشهایمان بی‌هوده جلوه کنند.» وقتی که این مسأله‌های یکجارو را در تکلیفها و آزمونها قرار می‌دهم، آنها را به‌طریقی دیگر امتیازدهی می‌کنم. در این موارد برای دانشجویانی که ایده‌هایی منتهی به راه‌حل می‌دهند یا تشخیص می‌دهند که کدام اصول مسأله حل کردن به مسأله مورد نظر مربوطند امتیاز چشمگیری قابل می‌شوم.

مسأله حل کردن

دو راه برای بررسی تابعهای نمایی و لگاریتمی وجود دارد و هر یک از این روشها طرفداران آشنین خود را دارد. چون اغلب به طرفداران هر یک از این روشها برسی‌خوریم که یک درس را می‌دهند بررسی تکمیلی از هر دو روش را گنجانده‌ام. در بخشهای ۲.۷، ۳.۷، ۴.۷ ابتدا تابعهای نمایی را تعریف کرده‌ام، بعد تابعهای لگاریتمی را به‌عنوان وارونهای آنها. (دانشجویان در دوره دبیرستان دیدند که این تابعها این‌گونه معرفی شده‌اند.) در روش دیگر، که در بخشهای ۲.۷، ۳.۷ و ۴.۷ آمده است، لگاریتم را به‌شکل انتگرال تعریف کرده‌ام و تابع نمایی وارونش است. البته، این روش از نظر شهودی ضعیفتر است، اما زیباتر است. از هر کدام که ترجیح می‌دهد استفاده کنید.

دو گونه بررسی تابعهای نمایی و لگاریتمی

اگر روش اول را انتخاب کردید، آنوقت اگر خواستید می‌توانید بیشتر فصل ۷ را پیش از فصلهای ۵ و ۶ بخوانید. با در نظر داشتن این انتخاب، مسأله‌هایی مشخص شده از انتگرال تابعهای نمایی و

لگاریسمی در انتهای بخشهای مرتبطی از فصلهای ۵ و ۶ قرار داده‌ایم. با این ترتیب ارائه مطلب می‌تواند به درس آهنگ سرچشمی داد و پایه‌های معالی و انتگرال معین را در نرم اول این درس تدریس کرد. در دسترس بودن تکنولوژی از اهمیت درک کامل مفهومی که در درس تصویر روی صفحه نمایش نرفته است نمی‌گذرد که هیچ، بر اهمیت این موضوع نیز می‌افزاید. البته، مائین‌حسابهای رسام و کامپیوترها، به شرطی که به‌طور صحیح از آنها استفاده شود، ابزاری قوی برای کشف و درک این مفهومی هستند. در این کتاب هم می‌توان از تکنولوژی استفاده کرد هم می‌توان استفاده نکرد. از دو نماد ویژه برای مشخص کردن مواقعی که استفاده از دستگاهی خاص احتیاج است استفاده کرده‌ایم. نماد  $\square$  تصویری تریبی را مشخص می‌کند که در آن قطعاً باید از چنین تکنولوژی‌هایی استفاده کرد، اما به معنی این نیست که در دیگر تریبها نباید از آنها استفاده کرد. نماد  $\square$  به مسائلی اختصاص داده‌ام که در آنها به امکانات سیستمهای جبری کامپیوتری (نظیر درایو، مپبل، متیکا یا TI-89) احتیاج است. اما تکنولوژی باعث مهجور ماندن قلم و کاغذ نمی‌شود. محاسبات و تریبهای دستی اغلب بر استفاده از تکنولوژی برای تریب و کسب به درک برخی مفاهیم از اهمیت دارد. هم معلمان و هم دانشجویان باید قدرت تصمیم‌گیری‌شان را برای اینکه در کجا کدام روش، دستی یا ماشینی، مناسبتر است بالا ببرند.

تکنولوژی

## محتوا

این کتاب با چهار آزمون سنجش آمادگی در موضوعات جبر مقدماتی، هندسه تحلیلی، تابعها و مثلثات، آغاز می‌شود.

آزمون سنجش آمادگی

این فصل نگاهی اجمالی به موضوع کتاب است و حاوی فهرستی از پرستهای که انگیزه بخش مطالعه حساب دیفرانسیل و انتگرال است.

نگاهی اجمالی به حساب دیفرانسیل و انتگرال

از همان ابتدا بر معرفی کردن جنگانه تابعها تأکید شده است. کلامی، عددی، تصویری و جبری. بحث از منتهای ریاضی منجر به مرور تابعهای معمولی، شامل تابعهای نمایی و لگاریتمی، در قالب این چهار روش می‌شود.

۱ ■ تابعها و منتهای

بستر لازم برای مطالب مربوط به حد را با پیش کشیدن زود هنگام بررسی مسأله‌های پذیر کردن خط مماس و سرعت فراهم آورده‌ایم. حدها را از دیدگاههای توصیفی، نموداری، عددی و جبری بررسی کرده‌ایم. بخش ۲.۱، درباره تعریف  $\epsilon$ - $\delta$ ای حد، اختیاری است.

۲ ■ حد

مواضع مربوط به مشتق را در دو بخش آورده‌ایم. تا اینکه دانشجویان مجال بیشتری برای عادت کردن به ایده مشتق به عنوان تابع داشته باشند. در مثالها و تریبها معنی مشتق را در زمینه‌های متعدد بررسی کرده‌ایم. در این موقع است که مشتقهای مرتبه‌های بالاتر را در بخش ۲.۲ معرفی کرده‌ایم.

۳ ■ مشتق

مطالب اصلی مربوط به مقدارهای اکسترمم و شکل منحنیها را از قضیه مقدار میانگین به دست آورده‌ایم. در ترمیم با استفاده از تکنولوژی بر تعامل میان حساب دیفرانسیل و انتگرال و مائین‌حسابها و تحلیل خانواده‌های منحنیها تأکید کرده‌ایم. به برخی مسأله‌های واقعی مربوط به بهینه‌سازی اشاره کرده‌ایم. از جمله اینکه چرا باید سرمان را  $2\pi$  بالا بیاوریم تا توک رنگین‌کمان را ببینیم.

۴ ■ کاربردهای مشتق‌گیری

از مسأله محاسبه مساحت و مسأله محاسبه مسافت برای بسترسازی پرداختن به انتگرال معین استفاده کرده‌ایم. ناندقتاری سیگمایی را هم معرفی کرده‌ایم چون به آن احتیاج داشته‌ایم. (بحث مفصل درباره ناندقتاری سیگمایی را در پیوست (و) آورده‌ایم.) تأکید بر توضیح دادن معنی انتگرال در زمینه‌های مختلف و بر تخمین زدن مقدار انتگرال از روی نمودار و جدول بوده است.

در این فصل کاربردهای انتگرال‌گیری - مساحت، حجم، کار، مقدار متوسط - را که می‌توان بدون استفاده از تکنیکهای انتگرال‌گیری خاص به آنها پرداخت آورده‌ایم. تأکید بر روشهای کپی بوده است. هدف این بوده است که دانشجویان بتوانند کمیتی را به قطعه‌های کوچک تقسیم کنند، با مجموعه‌های ریمان تقریب برتند و تشخیص بدهند که حد مورد نظر همان انتگرال است.

همان‌طور که در صفحه هشت به‌طور کامل توضیح دادیم، فقط به یکی از دو روش بررسی این تابعها احتیاج است - آن که ابتدا تابعها را تعریف می‌شود با آنکه تکنیک مشکل انتگرال معین تعریف می‌شود. رشد و زوال‌ناهایی را در این فصل بررسی کرده‌ایم.

همه روشهای معمول را بررسی کرده‌ایم. البته مشکل واقعی تشخیص این است که در وضعیتی که در آن هستیم بهترین تکنیک کدام است. از این روی در بخش ۵.۸ استرژژی برای انتگرال‌گیری آورده‌ایم. استفاده از سیستمهای جبری کامپیوتری را در بخش ۶.۸ بررسی کرده‌ایم.

در این فصل کاربردهایی از انتگرال‌گیری - طول قوسی و مساحت روزه - را آورده‌ایم که برای آنها بهتر است همه تکنیکهای انتگرال‌گیری را بدانیم. کاربردهایی در ریست‌سناسی، اقتصاد و فیزیک (نیروی هیدروستاتیک و مرکز جرم) را نیز آورده‌ایم. خطی مربوط به احتمال را نیز آورده‌ایم. کاربردهای بیشتری هم وجود دارند که می‌توان به‌طور واقع‌شماره در مورد نظر گنجاند. ملاحظان باید کاربردهایی را انتخاب کنند که برای دانشجویان مناسب‌تر و خودشان هم به آنها دلچسپی دارند.

مدل‌سازی مضمون متونگ این بررسی مقدماتی معادلات دیفرانسیل است. میدانهای سوا و روش اویزر را پیش از اینکه معادلات تفکیک‌پذیر و خطی را به‌طور صریح حل کنیم آورده‌ایم. در نتیجه به روشهای کیفی، عددی و تحلیلی اهمیت یکسان داده‌ایم. این روشها را برای مدل‌های افزایش جمعیت انسانی، لرزه‌شناسی و مدل‌های دیگر به‌کار گرفته‌ایم. چهار یا پنج بخش نخست این فصل شروع خوبی برای آشنایی با معادلات دیفرانسیل مرتبه اول است. در بخش آخر که اختیاری است از مدل شکارچی-شکار برای معرفی دستکاههای معادلات دیفرانسیل استفاده کرده‌ایم.

در این فصل منحنیهای پارامتری و قطبی را معرفی کرده‌ایم و از روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال برای بررسی آنها استفاده کرده‌ایم. منحنیهای پارامتری خیلی مناسب پروژه‌های آزمایشگاهی اند؛ دو پروژه‌ای که در این فصل آورده‌ایم مربوط به خانواده‌های منحنیها و منحنیهای زیگزاگند. بحث کوتاه در باب مقاطع مخروطی در مختصات قطبی راه را برای بررسی قوانین کپلر در فصل ۱۲ هموار می‌کند.

برای آزمونهای همگونی هم دلایل شهودی آورده‌ایم هم اثباتهای درست و حسابی. تخمینهای عددی مجموع سریها را برای اثبات اینکه از کدام آزمون برای اثبات همگونی استفاده کنیم قرار داده‌ایم. تأکید بر سریها و چند جمله‌ایهای تیلور و کاربردهای آنها در فیزیک است. تخمین خطاها شامل خطاهای ناشی از ابرار رسانی می‌شود.

## ۵ ■ انتگرال

### ۶ ■ کاربردهای انتگرال‌گیری

### ۷ ■ تابعهای وارون تابعهای نمایی، لگاریتمی و وارون مثلثاتی

### ۸ ■ تکنیکهای انتگرال‌گیری

### ۹ ■ کاربردهای دیگری از انتگرال‌گیری

### ۱۰ ■ معادلات دیفرانسیل

### ۱۱ ■ معادله‌های پارامتری و مختصات قطبی

### ۱۲ ■ دنباله‌ها و سریهای نامتناهی

- ۱۳ ■ بردارها و هندسهٔ فضا  
مطالب مربوط به هندسهٔ تحلیلی سه‌بعدی و بردارها را در دو فصل تقسیم کرده‌ایم. در فصل ۱۳ بردارها، حاصل‌ضربهای داخلی و خارجی، خطها، صفحه‌ها و رویه‌ها را بررسی می‌کنیم.
- ۱۴ ■ تابعهای برداری  
این فصل مربوط به تابعهای بردار-مقدار، مشتق و انتگرال آنها، طول و خمیدگی منحنیهای فضایی و سرعت و شتاب روی منحنیهای فضایی است. که منتهی به قوانین کپلر می‌شوند.
- ۱۵ ■ مشتق جزئی  
تابعهای دو یا چند متغیره را از دیدگاههای کلاسیک، عددی، تصویری و جبری بررسی کرده‌ایم. به‌ویژه مشتق جزئی را با توجه به ستونی خاص در جدول مقادیرهای شاخص گرما (دمای هوایی که احساس می‌کنیم)، به‌عنوان تابعی از دمای واقعی و رطوبت نسبی، معرفی کرده‌ایم. مشتقهای سویی را از روی نقشه‌های خطهای تراز دما، فشار و بارش برف تخمین زده‌ایم.
- ۱۶ ■ انتگرال چندگانه  
با استفاده از نقشه‌های خطهای تراز و قاعدهٔ میانگامی میانگین بارش برف و میانگین دما در ناحیهٔ مفروض را تخمین زده‌ایم. از انتگرالهای دوگانه و سه‌گانه برای محاسبهٔ احتمال مساحت رویه و (در پروژه‌ها) حجم ایرکرو و حجم تقاطع سه استوانه استفاده کرده‌ایم. محاسبات استوانه‌ای و کروی را برای محاسبهٔ انتگرالهای سه‌گانه معرفی کرده‌ایم.
- ۱۷ ■ حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری  
میدانهای برداری را از روی تصاویر میدانهای سرعتی که الگوهایی باد در خلیج سانفرانسیسکو را نشان می‌دهند معرفی کرده‌ایم. بر شتابهای میان قضیهٔ استوکس، انتگرالهای خط، قضیهٔ گرین، قضیهٔ استوکس و قضیهٔ دیورژانس تأکید کرده‌ایم.
- ۱۸ ■ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم  
چون معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول را در فصل ۱۰ بررسی کرده‌ایم، در این آخرین فصل معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی، کاربردهایشان در فضا، ارتعاش و مدارهای الکتریکی و جوابهای به‌شکل سری را بررسی کرده‌ایم.

## سخنی با دانشجویان

خواندن کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال سوی خواندن روزنامه یا مجله یا حتی کتاب فیزیک است. اگر مجبور شدید قسمتی را بیش از یک بار بخوانید تا آن را بفهمید و بسرد نشوید. باید قلم و کاغذ و ماشین حساب در دست باشید تا نموداری رسم کنید یا محاسباتی را انجام دهید.

برخی دانشجویان ابتدا سعی می‌کنند نکات ایشان را انجام دهند و فقط وقتی متن درس را می‌خوانند که در ترمیزی گیر کنند. توصیه‌ام این است که خوانندگی و فهمیدن هر بخش از متن درس پیش از اینکه به سراغ تمرین‌هایش بروید کار خیلی بهتری است. هرگاه به جایی نگاهی به تعریفها بیندازید تا معنی دقیق عبارات را بفهمید. همچنین، توصیه می‌کنم که پیش از خواندن هر مثال روی راه‌حلش را بگیرید و سعی کنید خودتان مسأله را حل کنید. اگر این کار را کنید، از اینکه راه‌حلش را ببینید چیز بیشتری عایدتان می‌شود. بخشی از هدف این درس این است که مسأله‌ای بار بباید. یاد بگیرید که راه‌حل تمرینها را گام به گام با جمله‌هایی توصیفی و مرتبط به هم بتوانید. سه ردیفی از معادله‌ها و دستورهای می‌ریخت.

پاسخ تمرینهای با شماره فرد را در انتهای کتاب آورده‌ام. در برخی تمرینها خواسته‌ام چیزی را به‌طور کلامی توضیح دهید یا تصویر کنید یا توصیف کنید. در این موارد فقط یک پاسخ درست وجود ندارد. بنابراین اگر جوابی با جواب من فرقی داشت بلافاصله فکر نکنید که اشتباه کرده‌اید. مثلاً اگر پاسخی در انتهای کتاب 1 -  $\sqrt{2}$  باشد و شما به‌دست آورده باشید  $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ ، آنوقت پاسختان درست است و گویا یک نام تجزیه نشان می‌دهد که پاسخها یکسان‌اند.

نماد  $\int$  برای انتگرال و  $\frac{d}{dx}$  برای مشتق می‌کنند که در آن قطعاً باید از ماشین حساب رسام با کامپیوتری که نرم‌افزار رسامی روی آن نصب شده است استفاده کرد. (در بخش 4.1 از نحوه استفاده از این ابزار رسامی و برخی مسأله‌ها که با آنها مواجه‌اید بحث کرده‌ایم) اما این به‌معنی آن نیست که در دیگر تمرینها نمی‌توانید از ابزار رسامی برای تحقیق درستی پاسختان استفاده کنید. نماد  $\int$  به مسأله‌های اختصاص دارد که در آنها به امکانات سیستمهای جبری کامپیوتری (نظیر دلبو، میبل، متیکا یا TI-89/92) احتیاج است.

همچنین، در جاهایی به نماد  $\square$  برسی‌خورید، که هشدار می‌دهد مرتکب خطا نشوید. این نماد را در حاشیه متن در جاهایی گذاشته‌ام که دیدام اکثر دانشجویانم مرتکب همین اشتباه شده‌اند.

توصیه می‌کنم این کتاب را پس از اتمام این درس برای مراجعات بعدی نگاه دارید. چون احتمال دارد که برخی جزئیات خاص حساب دیفرانسیل و انتگرال را از یاد ببرید، اگر در درسهای بعدی به

استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال نیاز دانشید، می‌توانید برای یادآوری به این کتاب مراجعه کنید. همچنین، چون این کتاب آنقدر مطلب دارد که نمی‌توان همه را در یک درس گنجاند، می‌توان از آن به‌جای مرجعی ارزشمند برای دانشمندان یا مهندسان فعال استفاده کرد.

حساب دیفرانسیل و انتگرال موضوع جذابی است، تا جایی که آن را از بزرگترین دستاوردهای انسان متفکر می‌دانند. امیدوارم به این موضوع پی ببرید که این مبحث نه تنها مفید است بلکه ذاتاً زیباست.

mikhanam.com